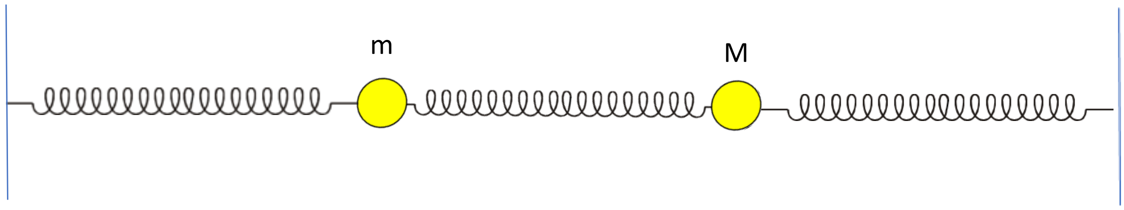
Δυο σώματα σε τρία ελατήρια

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
19-12-2020



Έστω ότι έχουμε δύο σώματα ίδιας μάζας m , τα οποία είναι δεμένα σε τρία όμοια ελατήρια σταθεράς k. Τα δύο ακριανά είναι στο ένα τους άκρο ακλόνητα δεμένα σε τοίχο. Μετακινούμε τα σώματα από την θέση ισορροπίας τους και τα αφήνουμε να κινηθούν. Παρακάτω μελετώ την κίνηση των σωμάτων.

Υποθέτουμε ότι οι απομακρύνσεις από τις θέσεις ισορροπίας των m και M είναι αντίστοιχα x και X. Έτσι αν κάνουμε επίσης μια υπόθεση ότι τα δύο πρώτα ελατήρια είναι επιμηκυμένα τότε θα έχουμε ότι οι δυνάμεις σε κάθε σώμα θα είναι:

$$F_m = -2kx + kX$$

$$F_M = -2kX + kx$$

(1)

Έτσι για τα σώματα ισχύει:

$$m\ddot{x} = -2kx + KX$$

$$m\ddot{X} = -2kX + kx$$

(2)

Αφαιρούμε τις σχέσεις του συστήματος (2) και προκύπτει:

$$m(\ddot{X} - \ddot{x}) = -3k(X - x)$$

(3)

Θέτουμε $y = X - x$ και η διαφορική (3) μετασχηματίζεται στην:

$$\ddot{y} + \frac{3k}{m}y = 0$$

(4)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 + \frac{3k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

(5)

Άρα η λύση της (4) είναι:

$$y = X - x = Acos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + Bsin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$$

(6)

Αν επανέλθουμε στο σύστημα (2) και τώρα προσθέσουμε κατά μέλη θα πάρουμε:

$$m(\ddot{x} + \ddot{X}) = -k(x + X)$$

(7)

Θέτουμε $\varphi = x + X$ και έχουμε:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{k}{m}\varphi$$

(8)

Με την προηγούμενη μέθοδο η λύση της διαφορικής είναι:

$$\varphi = x + X = \Gamma \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \Delta \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

(9)

Προσθέτουμε τώρα τις σχέσεις και μετασχηματίζουμε, και έχουμε:

$$X = Acos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + Bsin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + \Gamma \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \Delta \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

(10)

Από την σχέση (6) έχουμε τώρα:

$$x = -Acos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) - Bsin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + \Gamma \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \Delta \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

(11)

Οι σχέσεις (10) και (11) δίνουν τις χρονικές συναρτήσεις απομάκρυνσης κάθε ενός σώματος από την θέση ισορροπίας του. Οι σταθερές Α,Β,Γ,Δ καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες θέσης και ταχύτητας κάθε σώματος. Δηλαδή βλέπουμε ότι για να καθοριστεί πλήρως η κίνηση του ενός σώματος πρέπει να γνωρίζουμε και τις αρχικές συνθήκες του δεύτερου σώματος. Αυτό δείχνει ότι δεν υπάρχει ανεξαρτησία κάθε σώματος, αλλά αποτελούν όπως περιμέναμε ένα εξαρτώμενο σύστημα.

Εφαρμογή

Έστω ότι απομακρύνουμε κάθε σώμα από την θέση ισορροπίας του κατά d και τα αφήνουμε ελεύθερα χωρίς ταχύτητα. Το πρώτο σώμα απομακρύνεται προς τα αριστερά (δηλαδή στο -d) και το δεξιό προς τα δεξιά.

Από τις (10) και (11) έχουμε:

$$X(0) = A + \Gamma = d$$

$$x(0) = \Gamma - A = -d$$

(12)

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\Gamma = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ A = d$$

(13)

Παραγωγίζουμε τις (10) και (11) και αντικαθιστούμε την (13), οπότε:

$$\dot{X}(0) = \sqrt{\frac{3k}{m}}B + \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta = 0$$

$$\dot{x}(0) = -\sqrt{\frac{3k}{m}}B + \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta = 0$$

(14)

Προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε Β=Δ=0, άρα τελικά από τις (10) και (11) έχουμε:

$$X = d cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$$

$$x = -d cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$$

(15)

Παραγωγίζουμε:

$$\dot{X} = d\sqrt{\frac{3k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$$

$$\dot{x} = -d\sqrt{\frac{3k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$$

(16)

Έτσι βλέπουμε ότι κάθε σώμα έχει μέγιστη απομάκρυνση ίση με d και μέγιστη ταχύτητα ίση με $d\sqrt{3k/m}$. Οπότε βάσει αυτών σε ένα ερώτημα της μορφής, **πότε τα σώματα θα αποκτήσουν την ελάχιστη απόσταση τους για 10^{η} φορά,** θα έχουμε ότι (αν L το μήκος του ελατηρίου) η απόσταση των σωμάτων θα είναι:

$$S = l + X - x$$

(17)

Άρα η απόσταση τους είναι:

$$S = l + 2dcos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$$

(18)

Άρα η ελάχιστη απόσταση επιτυγχάνεται όταν το συνημίτονο είναι αρνητική μονάδα δηλαδή:

$$\sqrt{\frac{3k}{m}}t = 2\kappa\pi + \pi \quad \mu\varepsilon\ k = 0,1,..$$

(19)

Για 10^{η} φορά είναι κ=10 άρα:

$$\sqrt{\frac{3k}{m}}t = 21\pi \Rightarrow t = 21\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$$